Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιανουάριος 2025

Θέμα 1

(i) [1.5] Να εξετάσθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων στο διάστημα $(0, +\infty)$ το π.α.τ

$$y' = \frac{\cos[(y^2 + 2025)^{1/3}]}{e^x - 1} = 0,\ y(2025) = c,\ x > 0$$

όπου c ο αριθμός μητρώου σας, και να διατυπωθούν στη γενικότητα τους οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

(ii) [0.5] Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x) = 2^{x^2+1}$ είναι εκθετικής τάξης.

(iii) [0.5] Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $g(x) = \ln(e^x + x^{2025}),\ x \geq 0$ έχει μετασχηματισμό Laplace.

Θέμα 2

Θεωρούμε την ομογενή γ.δ.ε

$$y'''(x) + a_2 y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (E), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $a_i \in C(I),\ i = 0, 1, 2.$

(i) [1.2] Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα υποβιβασμού της τάξης για την (E).

(ii) [0.8] Αν y_1, y_2 είναι λύσεις της (E) με $y_1(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I$ και $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) \neq 0,\ \forall x \in I$ και $(E^\star)$ η δ.ε που προκύπτει μετά τον υποβιβασμό της (E) με χρήση της y_1, να εξετασθεί η ορθότητα των προτάσεων:

(a) Οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο διάστημα I.

(b) Η συνάρτηση $u(x) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x),\ x \in I$ είναι λύση της $(E^\star)$.

(iii) [0.5] Να περιγραφεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης (E) αν είναι γνωστές δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

(*)[0.8] Να αποδειχθεί ότι αν y είναι μια λύση μιας ομογενους γ.δ.ε 2ης τάξης που μηδενίζεται σε άπειρα σημεία ενός συμπαγούς διαστήματος $J \subset I$, τότε αυτή μιδενίζεται σε ολόκληρο το I.

Θέμα 3

(i) Θεωρούμε το π.α.τ

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0,\ y(1) = 0$$

Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών:

(ia) [0.9] Το παραπάνω π.α.τ έχει μοναδική λύση.

(ib) [0.6] Το πεδίο ορισμού της (των) λύσης (λύσεων) είναι κλειστό διάστημα.

(ii) [1] Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $y_i(t) = t^i,\ i = 1, \ldots, 2025,\ t \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και να εξετασθεί αν υπάρχει 2025−τάξης ομογενής γ.δ.ε ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με β.σ.λ το

$$S = \{t^i : i = 1, \ldots, 2025,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Θέμα 4

(i) Θεωρούμε την εξίσωση: $xy''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$.

(ia) [1] Να βρεθεί μία λύση της εξίσωσης γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ib) [0.3] Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της παραπάνω δ.ε.

(ii) Αν y_0 είναι λύση του π.α.τ $y'(x) + 2y(x) = f(x),\ y(0) = 0,\ x \geq 0$

(iia) [0.9] για $f(x) = [x]$, να υπολογίσετε την τιμή $y_0(\sqrt{10})$.

(iib) [0.3] για $f(x) = e^{x^2}(H_{10}(x) - H_{27}(x))$, να εξετασθεί αν η y_0 είναι φραγμένη.

(ii*) [1.2] Να δοθεί μια αναλυτική έκφραση της y_0 για τη συνάρτηση $f(x) = [x],\ \geq 0$.

Θέμα 5

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y''(t) + 4b^2 y(t) = A\cos(\omega t),\ t \geq 0,\ \omega \geq 0,\ b > 0, A \in \mathbb{R}^*$$

(i) [0.8] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση.

(ii) [0.5] Να εξετασθεί η ορθότητα των προτάσεων:
(A) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες
(B) Υπάρχουν λύσεις τις εξίσωσης οι οποίες διατηρούν σταθερό πρόσημο

(ii*) [0.5] Να βρεθεί ένα β.σ.λ της αντίστοιχης ομογενούς γ.δ.ε με χρήση μετασχηματισμού Laplace.

(iii) [1.2] Με χρήση μετασχηματισμού $z = \tan y$ να αποδειχθεί ότι η λύση του π.α.τ

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\tan y + x\tan^3 y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$$

τείνει προς το 0 καθώς το $x \to +\infty$.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα θέματα

Τα ερωτήματα (ii*) είναι εναλλακτικά των ερωτημάτων (ii)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ